CUADERNILLO 7

Nueva carpeta de Matemática VI

Alumno/a

Curso

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala
Luis Garaventa
Claudio Turano

Respuestas

a las actividades de los cuadernillos 1 a 6.

AIQUE

Este CUADERNILLO 7 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

En esta sección, se presentan las respuestas que permiten controlar si las actividades se han resuelto correctamente.
No se incluyen construcciones geométricas, representaciones gráficas de funciones, respuestas abiertas ni explicaciones, ya que no es una sección de consulta de procedimientos.
En los casos en que resulta necesario, las expresiones decimales se redondearon a los centésimos. En todos los casos, se considera $\pi = 3{,}14$.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí
y de Claudia García en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.

Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

Capítulo 1: Funciones exponenciales y logarítmicas

1 a) 1 b) a c) a^{m+n} d) a^{m-n}

e) a^{xm} f) $a^{\frac{n}{m}}$ g) a^{-m} h) $(a.b)^m$

2 a) m^8 b) a^{10} c) m^{-2} d) a e) a^6

3 a) $(5 . a^2 . b)^2$ b) $\left[\frac{5 . m^2}{a^3}\right]^2$ c) $(a . (x-2))^2$

4 a) 2^9 b) 6^4 c) 10^2 d) 2^{-4}

5 a) III. b) IV. c) II.

6

- El opuesto del cuadrado de un número x.
- El cuadrado del opuesto de un número x.
- El doble del cuadrado de un número x.
- El doble del cuadrado del opuesto de un número x.

$2(-x)^2$, $-x^2$, $(-x)^2$, $2x^2$

7 Respuesta personal.

8 a)

Tiempo transcurrido (años)	0	1	2	3	4	5	6
Dinero acumulado ($)	1	2	4	8	16	32	64

b) $D(t) = 2^t$ c) 8 años d) $1024

9 a)

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Volumen de líquido (litros)	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

b) $V(t) = \frac{4}{2^t}$

c) 6 hs d) $2{,}38 . 10^{-7}$

10 a)

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$

b) **I.** Reales positivos. **II.** Creciente. **III.** En $y = 1$. **IV.** No. **V.** Tiende a infinito. **VI.** Tiende a cero.

11 a) Construcción.

b) Las gráficas de f y g son simétricas respecto del eje de ordenadas. Las gráficas de h y m son simétricas respecto del eje de abscisas. Son crecientes las funciones f y h, y las funciones g y m son decrecientes.

12 a) Construcción.

b) $Im(f)$: $(-\infty ; 0)$; decreciente; ordenada al origen: -3; $Im(g)$: $(0 ; +\infty)$; decreciente; ordenada al origen: 2

13 a) Verdaderas: b) y d). Falsas: a) y c).

14 a) $f(x) = 3 . \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $f(x) = 0{,}001 . 10^x$

c) $f(x) = 6 . \left(\frac{5}{4}\right)^x$

15 a) $C(t) = 10\,000 . 1{,}01^t$ b) $11 268,25

16 a) 243 b) 121 500

17

	x	a	b	Conjunto imagen	Asíntota
$f(x) = 2 . 3^x + 1$	2	3	1	$(1; +\infty)$	$y = 1$
$g(x) = 2 . 3^x - 1$	2	3	-1	$(-1; +\infty)$	$y = -1$
$h(x) = 2 . 3^x$	2	3	0	$(0; +\infty)$	$y = 0$

18 $f_1(x)$: d $f_2(x)$: b $f_3(x)$: c $f_4(x)$: a

19

$f(x) = -3 . \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 2 . 3^x$, $d(x) = 10^x + 2$, $h(x) = -0{,}1^x - 1$

$(2; +\infty)$, $(-\infty ; 0)$, $(-\infty; -1)$, $(0 ; +\infty)$

20 a) III. b) VI. c) IV. d) I. e) V. f) II.

21

2^{2x}, 2^{x+2}, 2^{x-1}, 2^{2x+2}

$(2^x)^2$, $(2^x)^2 . 4$, $2^x . 4$, $2^x . \frac{1}{2}$

22 a) 2^{3x+1} b) 3^{2-x} c) 2^{10x+1} d) 5^{3x+8}

23 a) $x = -1$ b) $x = 2$ c) $x = 1$ d) $x = -\frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{1}{3}$ f) $x = -6$ g) $x = 1$ h) $x = 0$
i) $x = -2$

24 a) $4^3 = 64$ c) $2^{-2} = -\frac{1}{4}$ e) $(-2)^4 . (-1) = -16$
b) $-2^3 = -8$ d) $3^3 . 2 = 54$ f) $8^2 : \frac{1}{2} = 128$

25 a) 2^{-4x-9} b) 3^{5x-6} c) 2^{13x+18}

26 5 minutos.

27 a) $x = 0$ b) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = 2$ d) $x = -1$
e) $x = \frac{3}{2}$ f) $x = -3$ g) $x = -2$ h) $x = \frac{1}{3}$
i) $x = -1$

28 a) $x = -4$ b) $x = -\frac{3}{2}$ c) $x = -1$
d) $x = 2$ e) $x = 3$ f) $x = -4$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

29 a) 3 b) $\frac{1}{2}$ c) −2 d) 4 e) 0
f) $-\frac{1}{2}$ g) −2 h) No tiene solución.
i) No tiene solución. j) 1

30 Respuesta personal.

31 a) 1 b) 0 c) −1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$ f) 2

32

$\log_2 a < 0$	$a > 1$
$\log_2 a = 0$	$0 < a < 1$
$\log_2 a > 0$	$a = 2$
$\log_2 a = 1$	$a = 1$

33 a) **I.** 0,991 **II.** 1,991 **III.** 2,991 **IV.** 3,991
V. 0,916 **VI.** 3,218 **VII.** 5,521 **VIII.** 7,824
b) Respuesta personal.

34 a) 1 b) −3 c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) −1

35 8

36 a) $x = 81$ b) $x = -1$ c) $x = 7$ d) $x = \frac{1}{16}$
e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = -3$ o $x = -3$

37 a) $x = 3$; $x = -2$ b) $x = \frac{1}{4}$; $x = 16$
c) $x = \sqrt{5}$; $x = -\sqrt{5}$

38 a) 8 b) 1 c) 18 d) 6 e) $\frac{20}{3}$

39 a) 4,170 b) 4,192 c) −1,398

40 0,1

41 $-\frac{5}{3}$

42 a) $x = 4$ b) $x = 1000$ c) $x = 9$ d) $x = b$

43 a) 1,398 b) 1,204 c) −1,097 d) 0,806

44 a) $\frac{m}{r}$ b) $\frac{r}{m}$

45 m y r son recíprocos.

46 Respuesta personal.

47 a) $x = 3{,}332$ b) 5,322 c) $x = 0$

48 a) $x = 3$ b) $x = \frac{19}{4}$ c) $x = 17$ d) $x = 1$
e) $x = 32$ f) $x = 300$ g) $x = 2$ h) $x = -\frac{3}{4}$
i) No tiene solución.

49 a) $x = 2\sqrt{2}$ b) $x = \frac{1}{25}$; $x = 625$ c) $x = 2$
d) $x = 2$

50 64

51 a) $x = -2$; $y = 1$ b) $x = 1$; $y = -1$ c) $x = 1$; $y = 2$

52 a) $x = 2$; $y = 2$ b) $x = \frac{15}{2}$; $y = \frac{7}{2}$
c) $x_1 = 4$; $y_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1$; $y_2 = 2$ d) $x = 2$; $y = 5$

53 a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\log_2 x$	−2	−1	0	1	1,58
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	−1	−1,58

b)

	Dominio	Imagen	Ceros
$f(x)$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	1
$g(x)$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	1

c) **I.** No. **II.** Tienden a infinito, en valor absoluto. **III.** $f(x)$ es siempre creciente; $g(x)$ es siempre decreciente. **IV.** Simétricas respecto del eje x.

54 f: $b = 2$; $Dom(f) = (-2; +\infty)$; $Im(f) = \mathbb{R}$; intersección con los ejes: $x = -1$; $y = 1$
g: $b = 1$; $Dom(f) = (-1; +\infty)$; $Im(f) = \mathbb{R}$; intersección con los ejes: $x = 0$; $y = 0$
h: $b = -1$; $Dom(f) = (1; +\infty)$; $Im(f) = \mathbb{R}$; intersección con los ejes: $x = 2$

55 a) Construcción. b) **I.** No. **II.** Sí. **III.** Sí.

56 Respuesta personal.

57 a) $Dom(f) = (-2; +\infty)$; $Dom(g) = (2; +\infty)$
b) Construcción.
c) f: asíntota: $x = -2$; corte con los ejes: $x = -1$; $y = 1$; g: asíntota: $x = 2$; corte con los ejes: $x = \frac{5}{2}$, no corta al eje y.

58

Curva	Fórmula	Dominio	Conjunto imagen	Asíntota	$f(0)$	ceros
c	$\log x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$x = 0$	—	1
d	$-\log x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$x = 0$	—	1
a	$\log(x+3)$	$(-3;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$x = -3$	0,477	−2
e	$-\log(x-1)$	$(1;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$x = 1$	—	2
b	$\log(x+1)$	$(-1;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$x = -1$	0	0

59 9,5

60 a) $7{,}52 \cdot 10^{-31}$ g b) 5 días y medio.
c) Construcción.

61 Aproximadamente 28 000 años.

62 a) $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$ $r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ $n = \log_r\left(\frac{a_n}{a_1}\right) + 1$

63 Son geométricas: a); $r = 2$; $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$;
y c); $r = \frac{3}{4}$; $a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

64 4; 8; 16; 32; 64

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

65 $r = 3 : 2; 6; 18; 54; 156$

66

a_1	a_2	a_3	a_4	r	S_6
4	20	100	500	5	624
15	5	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{200}{9}$
400	40	4	0,4	0,1	444,4
2	0,4	0,08	0,016	0,2	2,496
−8	−4	−2	−1	0,5	−15

67 3 cm por 6 cm por 12 cm

68 9°, 27°, 81°, 243°. Cóncavo.

69

Tiempo (anual)	Cálculo del monto	Monto ($)
1	$100 + 100 . 0,05 = 100 . (1 + 0,05)$	105
2	$100 . (1 + 0,05) . (1 + 0,05) = 100 . (1 + 0,05)^2$	110,25
3	$100 . (1 + 0,05)^2 . (1 + 0,05) = 100 . (1 + 0,05)^3$	115,76
4	$100 . (1 + 0,05)^4$	121,55
5	$100 . (1 + 0,05)^5$	127,63
n	$100 . (1 + 0,05)^n$	$100 . 1,05^n$

70 a) $127, 63 b) $179,59 c) $100 . (1 + 0,05)^n$
d) $142,58 e) $M_n = 100 . (1 + i)^n$
f) $M_n = C_0 . (1 + i)^n$

71 a) $A_3 = \frac{1}{16}$; $A_4 = \frac{1}{64}$; b) $r = \frac{1}{4}$ $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
c) Tiende a 0.

72 a) $B_1 = 0$; $B_2 = \frac{3}{4}$; $B_3 = \frac{15}{16}$; $B_4 = \frac{63}{64}$ b) No.
c) Tiende a 1.

73 a)

a_1	$(1 + 1)^1 = 2$	a_{100}	2,59374246
a_2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$	a_{1000}	2,716923932
a_3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37037037$	$a_{10\,000}$	2,718268237
a_4	2,44140625	$a_{100\,000}$	2,718280469
a_5	2,48832	$a_{1\,000\,000}$	2,718281693

b) **I.** Sí. **II.** Sí. c) 2,718281828
d) a_n tiende a e para n tendiendo a infinito.

74 a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e}$ c) e^2 d) $\sqrt{e}$ e) e

75 a) $C_f = 25\,000 . (1{,}005)^n$ b) $26 541,95
c) 10 d) 26 860,60

76 La sustancia A.

77 Recolección de datos.

78 a) 15 625 semillas. b) $S(m) = 5^m$
c) $S(m) = 8 . 5^m$

79 a) 100 días: 7,127 g; 200 días: 0,397 g
b) 144 días.

80 a) 5,6 ml b) 461,12 ml
c) $D(t) = 200 . \left(\frac{3}{5}\right)^{t-1}$

81 Construcción.

82 Construcción.

83 a) $x = 4$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) $x = -2$
e) $x = \frac{2}{3}$

84 a) $x = -\frac{5}{8}$; $y = \frac{5}{8}$ b) $x = \sqrt{2}$; $y = 2\sqrt{2}$
c) $x = 2$; $y = 9$

85 Verdaderas: b) c) y d) Falsas: a) y e).

86 a) $y = 4 . 1{,}5^x$ b) 45,56 c) No. d) −3,13 °C

87 a) 10 000 y 10 824 individuos, respectivamente.
b) En 2009.

88 a) $S(a) = 900 . 1{,}003^a$ b) $984,62
c) A partir del mes 36.

89 a) Construcción. b) En un mes.
c) Entre 1,5 y 2 meses.

90 a) 1731 bacterias. b) 83,6 horas.

91

Capital inicial	Interés	Tiempo	Monto
6000	2% mensual	8 meses	7029,96
100 366,50	1,5% mensual	1 año	120 000
720	5,5 % mensual	6 bimestres	1368
51 535,50	2% mensual	14 meses	68 000

92 a) 2 400 532 usuarios. b) 23,37%

93 a) $a_n = 27\,949\,480 . (1{,}01413)^{n-1980}$ b) 14,13%
c) 34 496 750 habitantes.
d) 42 577 743 habitantes.

94 $a = 2$; $b = 6$ y $c = 18$

95 a) V b) F

96 a) $a_5 = \frac{3}{16}$ b) $r = 2$

Autoevaluación

1 c)

2 a) **IV.** b) **III.** c) **I.**

3 d)

4 d)

5 a) **III.** b) **III.** c) **IV.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Capítulo 2: Funciones trigonométricas

1 a) 77; 36; 85 65; 56; 33 29; 20; 21 17; 15; 8

b) Respuesta personal.

2 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $2 . \sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

d) $5 - 2 . \sqrt{6}$

3

$\hat{\alpha}$	Complemento de $\hat{\alpha}$	Suplemento de $\hat{\alpha}$
17°	73°	163°
$x + 22°$	$3x + 20°$	146°
$15x - 14°$	29°	$18x + 29°$
18°	$11x - 16°$	$24x - 30°$

4 4 m.

5 Sí.

6 Primer cuadrante: $\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\varphi}, \hat{\nu}$

Segundo cuadrante: $\hat{\beta}, \hat{\iota}, \hat{\lambda}, \hat{\pi}$

Tercer cuadrante: $\hat{\varepsilon}, \hat{\chi}, \hat{\eta}, \hat{\mu}$

Cuarto cuadrante: $\hat{\phi}, \hat{\kappa}, \hat{o}$

7 Grupo A: $\hat{\chi}, \hat{\kappa}, \hat{\eta}$

Grupo B: $\hat{\alpha}, \hat{\varepsilon}, \hat{\lambda}$

Grupo C: $\hat{\lambda}, \hat{\phi}, \hat{\varphi}$

Grupo D: $\hat{\iota}, \hat{\delta}, \hat{\beta}$

8 Respuesta personal.

9

Grados sexagesimales	360°	450°	225°	720°	135°	150°	540°	120°	30°	1800°
Radianes	2π	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	4π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	3π	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	10π
Giros	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$	2	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	5

10 8,72 cm.

11 11 π

12 sen $\hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tg $\hat{\alpha} = -1$

sen $\hat{\beta} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$; cos $\hat{\beta} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; tg $\hat{\beta} = \frac{1}{2}$

sen $\hat{\gamma} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; cos $\hat{\gamma} = -3\frac{\sqrt{10}}{10}$; tg $\hat{\gamma} = -\frac{1}{3}$

sen $\hat{\varepsilon} = -3\frac{\sqrt{13}}{13}$; cos $\hat{\varepsilon} = -2\frac{\sqrt{13}}{13}$; tg $\hat{\varepsilon} = \frac{3}{2}$

13

$\hat{\alpha}$	$(x; y)$	sen $\hat{\alpha}$	cos $\hat{\alpha}$	tg $\hat{\alpha}$
0°	(1; 0)	0	1	0
90°	(0; 1)	1	0	No existe
180°	(−1; 0)	0	−1	0
270°	(0; −1)	−1	0	No existe
360°	(1; 0)	0	1	0
810°	(0; 1)	1	0	No existe
−90°	(0; −1)	−1	0	No existe

14 Construcción.

15

	Signo del seno	Signo del coseno	Signo de la tangente
1.° cuadrante	+	+	+
2.° cuadrante	+	−	−
3.° cuadrante	−	−	+
4.° cuadrante	−	+	−

16 sen $\hat{\alpha}$: a) $2\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-5\frac{\sqrt{26}}{26}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos $\hat{\alpha}$: a) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg $\hat{\alpha}$: a) 2 b) 5 c) 1

cosec $\hat{\alpha}$: a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{26}}{5}$ c) $-\sqrt{2}$

sec $\hat{\alpha}$: a) $-\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{26}$ c) $-\sqrt{2}$

ctg $\hat{\alpha}$: a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 1

17

Punto perteneciente al lado terminal de $\hat{\alpha}$	sen $\hat{\alpha}$	cos $\hat{\alpha}$	tg $\hat{\alpha}$	cosec $\hat{\alpha}$	sec $\hat{\alpha}$	ctg $\hat{\alpha}$
(1; 1)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
(−4; 3)	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{3}$
(−2; −3)	$-\frac{3\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{\sqrt{13}}{3}$	$-\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\frac{2}{3}$
(8; −6)	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{3}$

18 Se verifican.

19 Construcción.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

20 a) Eje x: $\{0, \pi\}$; Eje y: $\{0\}$

b) Intervalos de crecimiento: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

Intervalo de decrecimiento: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$

c) Máximos: $y = 1$ en $x = \frac{\pi}{2}$

Mínimos: $y = -1$ en $x = \frac{3}{2}\pi$

d) Intervalo de positividad: $(0; \pi)$

Intervalo de negatividad: $(\pi; 2\pi)$

21

	a	b	Fórmula	T	Ceros	Máximo	Mínimo	C⁻	C⁺
f_1	3	2	$y = 3\operatorname{sen}(2x)$	π	$\left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$	$y = 3$	$y = -3$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
f_2	2	$\frac{2}{3}$	$y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)$	3π	$\left\{0; \frac{3}{2}\pi\right\}$	$y = 2$	$y = -2$	$\left(0; \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; \pi\right)$
f_3	-2	$\frac{1}{3}$	$y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$	6π	$\{0; 3\pi\}$	$y = 2$	$y = -2$	$(3\pi; 6\pi)$	$(0; 3\pi)$

22 Construcción.

23 Construcción.

24 a) Eje x: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{\pi}\right\}$; Eje y: $\{1\}$

b) Intervalos de crecimiento: $(\pi; 2\pi)$

Intervalo de decrecimiento: $(0; \pi)$

c) Máximos: $y = 1$ en $x = 0$

Mínimos: $y = -1$ en $x = \pi$

d) Intervalo de positividad: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Intervalo de negatividad: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

25

	a	b	Fórmula	T	Ceros	Máximo	Mínimo	C⁻	C⁺
f_1	1	4	$y = \cos(4x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left\{\frac{1}{8}\pi; \frac{3}{8}\pi\right\}$	$y = 1$	$y = -1$	$\left(0; \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi; \frac{5}{8}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{8}\pi; \frac{3}{8}\pi\right)$
f_2	2	1	$y = 2\cos x$	2π	$\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$	$y = 2$	$y = -2$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$
f_3	-3	$\frac{2}{3}$	$y = -3\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	3π	$\left\{\frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi\right\}$	$y = 3$	$y = -3$	$\left(\frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi\right)$	$\left(0; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi; 3\pi\right)$

26 $f(x)$: A; $g(x)$: B

27 Construcción.

28 a) Intersección con los ejes en el origen de coordenadas.

b) Intervalo de crecimiento: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; no decrece.

c) No posee máximos ni mínimos.

d) Intervalo de positividad: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Intervalo de negatividad: $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

29 Construcción.

30

En grados	$180° - \hat{\alpha}$	$180° + \hat{\alpha}$	$90° + \hat{\alpha}$	$90° - \hat{\alpha}$	$270° - \hat{\alpha}$	$270° + \hat{\alpha}$
En radianes	$\pi - \hat{\alpha}$	$\pi + \hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{2} + \hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}$	$\frac{3}{2} - \hat{\alpha}$	$\frac{3}{2} + \hat{\alpha}$

31 $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 45° = 1$; $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$;

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

32

$\hat{\alpha}$	0°	30°	45°	60°	90°
sen $\hat{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos $\hat{\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg $\hat{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
cotg $\hat{\alpha}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
sec $\hat{\alpha}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	
cosec $\hat{\alpha}$		2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

33 a) $x = 180°$

b) $x_1 = 45°$; $x_2 = 225°$

c) $x_1 = 45°$; $x_2 = 315°$

d) $x_1 = 150°$; $x_2 = 330°$

e) $x_1 = 45°$; $x_2 = 315°$

f) $x_1 = 33° 41' 24''$; $x_2 = 213° 41' 24''$

34 b) y d) no tienen solución.

35 a) $x_1 = 60°$; $x_2 = 300°$

b) $x_1 = 60°$; $x_2 = 300°$; $x_3 = 120°$; $x_4 = 240°$

c) $x_1 = 45°$; $x_2 = 285°$

d) $x_1 = 60°$; $x_2 = 240°$

e) $x_1 = 0°$; $x_2 = 360°$

f) $x_1 = 0°$; $x_2 = 360°$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

36

	Dominio	Imagen	Período	Ordenada al origen
f	$\mathbb{R}$	[0; 3]	5	(0; 0)
g	[−6; 10]	[−2; 2]	8	(0; −2)
h	[−4; 9)	{1; −1}	5	(0; −1)
j	(−1; 15]	[0; 4]	5	(0; 4)

37 a) $\hat{\omega} = \frac{5}{3}\pi \cdot t$

b) $x = 13 \cdot \operatorname{sen} \hat{\omega}$; $y = 13 \cdot \cos \hat{\omega}$

38 a) $t_1 = \frac{1}{800}$; $t_2 = \frac{1}{440}$

b) $a = 0{,}01$; $b = 880\pi$; el eje horizontal indica el tiempo medido en segundos; $t_1 = \frac{3}{1760}$; $t_2 = \frac{1}{1760}$

39 a) T = 0,5 segundos

b) Construcción.

c) 0,25 s; 4,76 cm; izquierda; 3

d) Construcción.

40 a) $x_1 = 120°$; $x_2 = 240°$

b) $x_1 = 11° 40'$; $x_2 = 51° 40'$

c) $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$; $x_3 = 210°$; $x_4 = 330°$

41 a) $f(x) = 1{,}5 \operatorname{sen}(2x)$: $a = 1{,}5$; $T = \pi$

$g(x) = -2 \operatorname{sen}(0{,}5x)$: $a = -2$; $T = 4\pi$

b) $h(x) = 2{,}5 \cos(4x)$: $a = 2{,}5$; $T = \frac{\pi}{2}$

$m(x) = -0{,}5 \cos(2x)$: $a = -0{,}5$; $T = \pi$

AUTOEVALUACIÓN

1 c)

2 b)

3 d)

4 c)

5 d)

6 b)

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

1 a) III. b) I. c) II.

2 **Gráfico I.**
Eje *x*: tiempo (segundos)
Eje *y*: distancia (cm)

Gráfico II.
Eje *x*: tiempo (minutos)
Eje *y*: cantidad de bacterias.

Gráfico III.
Eje *x*: tiempo (días)
Eje *y*: masa (g)

3 1000

4 2

5 60 g. En 17 horas, aproximadamente.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Capítulo 3: Análisis matemático I

1 a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}-\{-3\}$ c) $\mathbb{R}-\{3;-3\}$
d) $\mathbb{R}$ e) $x>1$ f) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;
g) $\mathbb{R}$ h) $[0;+\infty)$ i) $\mathbb{R}^*$
j) $(0;4)\cup(4;+\infty)$ k) $\mathbb{R}-\{1;-3\}$ l) $\mathbb{R}-\{1;-1\}$

2 Construcción.

3 a) 1 b) Respuesta personal.

4 a) Se acercan a 10. b) Se acercan a 0,25.
c) Dominio de f: $\mathbb{R}$; Dominio de g: $\mathbb{R}-\{2;-2\}$
d) $f(1)=10$; $g(2)$ no es posible.
e) Comparación.

5 a) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^-} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^+} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\frac{3}{5}$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \frac{3}{5}$

6 a) 6 b) No existe. c) 0 d) 6
e) 2 f) 2 g) 6 h) 2 i) 0 j) 6
k) 2 l) No existe.

7 a) Comprobación. b) Respuesta personal.
c) En **V.** $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$. En **VI.** $n\neq 0$ y si n es par y menor que 1 en módulo, $\lim\limits_{x\to c} f(x)>0$.

8 a) 19 b) 3 c) 5 d) 8 e) -1 f) $-e$

9 a) Respuesta personal. b) $+\infty$

10 a) Construcción.

11 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-2$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=2$
$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=+\infty$

12 a) Respuesta personal. b) Respuesta personal.
c) 0 d) 0

13 Construcción.

14 a) I. $\infty-\infty$ II. $\frac{0}{0}$ III. $0\cdot\infty$ IV. $\frac{0}{0}$
V. $\frac{0}{0}$ VI. $\frac{\infty}{\infty}$ VII. $\frac{\infty}{\infty}$ VIII. $\frac{0}{0}$
b) I. -2 II. $\frac{3}{7}$ III. -1 IV. $\frac{1}{2}$
V. $\frac{1}{2}$ VI. 0 VII. 0 VIII. 4

15 a) 2 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{8}{11}$ d) $\frac{1}{2}$
e) 6 f) $\sqrt{2}$ g) 5 h) 0
i) $+\infty$ j) 0

16 a) $d(t)=\begin{cases}200t & \text{si } 0\leq x<10\\ 2000 & \text{si } 10\leq x<15\\ 200t-1000 & \text{si } 15\leq x<20\\ 3000 & \text{si } 20\leq x<40\end{cases}$

b) $v(t)=\begin{cases}200 & \text{si } 0\leq x\leq 10\\ 0 & \text{si } 10<x\leq 15\\ 200 & \text{si } 15<x<20\\ 0 & \text{si } 20<x\leq 40\end{cases}$

c) d es contínua y v es discontínua.
d) Esencial.

17 a) Continua. b) Discontinua en $x=1$.
c) Discontinua en $x=5$.

18 a) $a=-9$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $a=2$

19 a) $p(c)=\begin{cases}18x & \text{si } x\leq 10\\ 12x & \text{si } x>10\end{cases}$ b) $18\,.\,10=180$
c) No es continua en $x=10$.

20 a) 39,5 toneladas b) 2812,5 toneladas. c) No.

21 a) $Dom(h)=\mathbb{R}-\{3\}$; discontinua en $x=3$
Asíntota vertical: $x=3$
Asíntota horizontal: $y=0$
b) $Dom(n)=\mathbb{R}-\{3\}$; discontinua en $x=3$
Asíntota vertical: $x=3$
Asíntota oblicua: $y=x+6$
c) $Dom(g)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$; discontinua en $x=1$ y $x=-1$
Asíntota vertical: $x=-1$
Asíntota oblicua: $y=x$
d) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{2;3\}$; discontinua en $x=2$ y $x=3$
Asíntota vertical: $x=2$ y $x=3$
Asíntota horizontal: $y=5$
e) $Dom(j)=\mathbb{R}-\{0;1\}$; discontinua en $x=0$ y $x=1$
Asíntota vertical: $x=0$ y $x=1$
Asíntota horizontal: $y=0$
f) $Dom(m)=\mathbb{R}$; asíntota horizontal: $y=2$

22 $a=-12$; $b=6$

23 a) $f'(2)=-4$ b) $g'(-1)=2$ c) $h'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$

24 a)

Función $f(x)$	$f(1+h)$	$f(3+h)$	$f(2+h)$	$f(0+h)$	$f(x+h)$
I. $x-2$	$h-1$	$h+1$	h	$h-2$	$x+h-2$
II. $\sqrt{x+4}$	$\sqrt{h+4}$	$\sqrt{h+6}$	$\sqrt{h+5}$	$\sqrt{h+3}$	$\sqrt{x+h+3}$
III. x^3-1	$(1+h)^3-1$	$(3+h)^3-1$	$(2+h)^3-1$	h^3-1	$(x+h)^3-1$
IV. $\sqrt{x+3}-5$	$\sqrt{h+2}-5$	$\sqrt{h+4}-5$	$\sqrt{h+3}-5$	$\sqrt{h+1}-5$	$\sqrt{x+h+1}-5$
V. $\frac{1}{(x+1)^3}$	$\frac{1}{(h+3)^3}$	$\frac{1}{(h+5)^3}$	$\frac{1}{(h+4)^3}$	$\frac{1}{(h+2)^3}$	$\frac{1}{(x+h+2)^3}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

b) **I.** $f'(1) = 1$; $f'(3) = 1$; $f'(2) = 1$; $f'(0) = 1$

II. $f'(1) = \frac{1}{4}$; $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$; $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$; $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

III. $f'(1) = 3$; $f'(3) = 27$; $f'(2) = 12$; $f'(0) = 0$

IV. $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $f'(3) = \frac{1}{4}$; $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $f'(0) = \frac{1}{2}$

V. $f'(1) = -\frac{2}{27}$; $f'(3) = -\frac{2}{125}$; $f'(2) = -\frac{1}{32}$; $f'(0) = -\frac{1}{4}$

25 a) $f'(x) = 2x$ b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = 2(x+1)$ e) $f'(x) = 3x^2$ f) $f'(x) = 0$

26 a) $f'(x) = 3$ b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$

c) $f'(x) = 6x^2$ d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

e) $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$ f) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

27 Para $x_0 = 4$: $y = 6x - 24$; para $x_0 = 0$: $y = -2x - 8$.

28 Para $x_0 = 0$: $y = -x$; para $x_0 = 1$: $y = x - 1$.

29 a) $f'(x) = -x^2 + 8x + 20$ b) 392 unidades cuadradas.

30 a) $f'(x) = 4x^3 - 1$ b) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

c) $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$ d) $f'(x) = 12x^3$

e) $f'(x) = (5x^4 + x^5)e^x$ f) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

g) $f'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ h) $f'(x) = \frac{(2x^3 - 3x^2 - 2)}{(x-1)^2}$

31 Comprobación.

32

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$(\cos x)^3$	$3 \cdot (\cos x)^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)$	$\cos x^3$	$-\operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2$
$\ln x^2$	$2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$	$e^{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$
$\ln(x^3)$	$\frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}$	$\ln(\operatorname{tg} x^2)$	$\frac{1}{\operatorname{sen} x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 2x \operatorname{cotg} x^2$
$\sqrt{\ln x}$	$\frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$	$(x^2+1)^4$	$4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2+1)^3$

33 a) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ b) $f'(x) = \frac{-2\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

c) $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = 5e^{5x}$ e) $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = e^{-x}[4\cos(4x) - \operatorname{sen}(4x)]$

34 $y = \frac{1}{2}x - 1$

35 $\left(\frac{\pi}{12}; 1\right)$

36 No es perpendicular a la recta dada; es paralela.

37 a) Construcción. b) 3,05 l c) 3,05 l

d) La pendiente de la tangente es cero. d) 3,05 l

38 $v(t) = -9{,}8\,t$ $a(t) = -9{,}8$

39 $v(2) = -19{,}6$ $a(2) = -9{,}8$

40 2,26 s aproximadamente.

41 Respuesta personal.

42 Respuesta personal.

43 Construcción.

44 $\left(3;1\right)$ y $\left(1;\frac{7}{3}\right)$

45 $a = -2$; $b = 4$

46 $(2; -5)$ y $\left(2\frac{1}{3}; \frac{41}{27}\right)$

47 $x = 1$ y $x = -1$

48 a) $v(t) = 200 - 10t$ b) 0 m/s c) 20 s

d) 2000 m e) (20; 40) f) −200 m/s

49 a) 16,8 m b) $v(t) = -9{,}8\,t + 12$

c) 1,22 s aproximadamente.

d) 24,15 m aproximadamente.

e) 2,04 s aproximadamente.

f) Velocidad positiva: [0; 1,22); velocidad negativa: (1,22; 2,44].

AUTOEVALUACIÓN

1 c)

2 b)

3 d)

4 c)

5 d)

6 b)

7 d)

8 c)

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Capítulo 4: Análisis matemático II

1 I. c) IV. h) VII. e) X. b)
II. d) V. j) VIII. c) XI. h)
III. i) VI. l) IX. k) XII. f)

2 Intervalo de crecimiento: (1; 3)
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ error
$C^+ = (-\infty; 0) \cup (2{,}5; 3{,}5)$; $C^- = (0; 2{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$
Máximo local: (3; 1); mínimo local: (1; –3)

3 a) Construcción.

b) 50 unidades de área.

c) $\begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ y \geq -\frac{11}{2}x + 12 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 12 \end{cases}$

4 a) Construcción.

b) (1; 4); (4; 1); (4; 9)

c) 12 unidades de área.

5 a) Máximo local: (1; 4); mínimo local: (3; 0)

b) Intervalo de crecimiento: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;
Intervalo de decrecimiento: (1; 3)

c) Respuesta personal.

d) Positivas.

e) Negativas.

f) Construcción.

g) Nula.

6 a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) –3; –1 y 1

c) Intervalo de crecimiento: $(-3; -1) \cup (1; +\infty)$;
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; -3) \cup (-1; 1)$

d)

	Intervalo	Punto crítico	Intervalo	Punto crítico	Intervalo	Punto crítico	Intervalo
	$(-\infty; -3)$	$x = -3$	$(-3; -1)$	$x = -1$	$(-1; 1)$	$x = 1$	$(1; +\infty)$
Signo de $f'(x)$	–		+		–		+
$f(x)$	decrece	mínimo	crece	máximo	decrece	mínimo	crece

e) Construcción.

7

	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento
a)	$(6; +\infty)$	$(-\infty; 6)$
b)	$(-5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$
c)	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
d)	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
e)	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$
f)	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$

8 a)

	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
I.	$\mathbb{R}$	----------
II.	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$
III.	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-1; 1)$
IV.	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

b) II. $y = -27x + 35$
III. $y = \frac{2}{3}x + \frac{21}{4}$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{21}{4}$
IV. $y = 0$

9 La opción correcta en la primera frase es *por arriba*; en la segunda frase es *por abajo*.

10 a) I. Los puntos de contacto de $f(x)$ son (....0; 0....) y (..12; 0....) con el eje x y (....0; 0....) con el eje y.

II. $f'(x)$ se anula en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 8$

III. $f''(x)$ se anula en el punto de abscisa $x = 4$

b) I. Eje x: (0; 0) y (12; 0); eje y: (0; 0)

II. $x = 0$ corresponde a un máximo local; $x = 8$ corresponde a un mínimo local.

III. $x = 4$

c) I. $f''(0) < 0$; por lo tanto, $f(x)$ tiene un máximo en $f(0) = 0$ y $f(x)$ tiene un mínimo en $f(8) = -\frac{128}{3}$ porque $f''(8) > 0$

II. La concavidad de $f(x)$ cambia en $x = 4$ porque $f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty; 4)$ y $f''(x) > 0$ en el intervalo $(4; -\infty)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

11 a) $Dom(f)$: $\mathbb{R}-\{0\}$; no tiene contacto con los ejes
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota oblicua: $x = y$
Intervalo de crecimiento: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
Intervalo de decrecimiento: $(-1; 0) \cup (0; 1)$
Cóncava hacia arriba: $(0; +\infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty; 0)$

b)

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
Signo de $f(x)$	−		−		+		+
Signo de $f'(x)$	+		−		−		+
Crecimiento y decrecimiento	↗	Máximo	↘	Asíntota vertical	↘	Mínimo	↗
Signo de $f''(x)$	−		−		+		+
Curvatura	∩		∩		∪		∪

12

	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento
a)	$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$
b)	$\mathbb{R}$	----------
c)	$(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$	$(-5; -1)$
d)	$(-\infty; -1)$	$(-1; +\infty)$
e)	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$	$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$

	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
a)	----------	$\mathbb{R}$
b)	$(-5; +\infty)$	$(-\infty; -5)$
c)	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -3)$
d)	$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$	----------
e)	$\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$

13 Intervalo de crecimiento: $(-2; +\infty)$
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 2)$
$C^+ = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; C^-: $(-3; 1)$

14 Construcción.

15 Construcción.

16 a) Intervalo de crecimiento: $(9; +\infty)$
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 9)$

b) Abscisa del mínimo: $x = 9$.
Puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 6$.

c) Construcción.

17 Los dos números son iguales a 11.

18 Ambos son $5\sqrt{2}$.

19 El número es 2.

20 a) $V = xy^2$

b) $y = 30 - 2x$

c) $V(x) = x \cdot (30 - 2x)^2$

d) $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$

e) $x = 5$; $x = 15$

f) 5 y 15

g) 20 cm x 20 cm x 5 cm

21 a) 320 cm^2

b) 448,18 cm^2

c) 276,92 cm^2

22 a) $x = 20$ m; $y = 40$ m b) 160 m

23 Sí, en $x = 2$.

24 $x = 3$; $y = 1$

25 $2 + 2\sqrt{2}$ cm

26 a) $I = -q^2 + 100q$

b) $B = -\frac{1}{3}q^3 + 6q^2 - 11q - 50$

c) $q = 11$

d) $B = 111{,}33$

27 12 semanas.

28 Lado del cuadrado: 35,88 cm;
Lado del triángulo: 62,16 cm

29 $m = 1$; $b = 4$

30 $x = 3$ cm; $y = 5$ cm

31 Respuesta personal.

32 a) $\frac{x^6}{6} + k$ d) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \ln x + \operatorname{sen} x + k$

b) $-\frac{1}{x^3} + k$ e) $\frac{m^3 x^8}{8} + k$

c) $\frac{(x+3)^3}{3} + k$ f) $\frac{m^4 x^7}{4} + k$

33 a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x + 1$

b) $e^x + \cos x - 2$

c) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{3}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

34 Verificación.

35 a) 15 b) $\frac{39}{4}$

36 a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{253}{12}$ c) 3

37 a) $\int_0^7 (x+1)dx - \int_0^{7} \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$

b) $\frac{343}{18}$

38 a) $\frac{125}{6}$ b) 8 c) $\frac{37}{12}$

39 a) $\frac{243}{4}$ b) $\frac{28}{3}$

40 a) 4,9 mm

b) Razas africanas de abeja occidental.

41 a) 34,64 km/h

b) $433,01

c) 72,11 km/h

42 $\left(-\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right)$

43 a) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}; y = \sqrt[3]{4}$

b) $x = 1; y = 1$

44 $54\pi\sqrt{3}$ cm^3

45 Gana C en el caso de la derecha.

46 $l = 11,21$ aproximadamente
$h = 7,59$ aproximadamente

47 a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{136}{3}$

48 0,37

49 $\frac{437}{192}$

AUTOEVALUACIÓN

1 a)

2 b)

3 b)

4 c)

5 a)

6 c)

7 d)

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

1 $g(x) = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)x$

2 $y = 0$

3 Respuesta personal.

4 Tangente a la gráfica de f: pendiente –3.
Tangente a la gráfica de g: pendiente $4 \ln \frac{2}{3}$.

5 $A = \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx + \int_2^3 [g(x) - f(x)]dx$

6 0,86

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Capítulo 5: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1 $3x - y = 1$ — $6x - 2y = 2$; $x + y = 3$ — $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $-2y = x - 1$ — $4x + 4y = 12$

2

Si un sistema de ecuaciones	Entonces
es compatible determinado	tiene solo una solución
es compatible indeterminado	tiene infinitas soluciones
es incompatible	no tiene solución

3 a) Sistema compatible determinado. La solución es $x = y = -2$.
b) Sistema compatible indeterminado.
c) Sistema incompatible.

4 a) $k \neq 2$ b) $k = 3$ c) $k = 1$

5 a) Es un sistema indeterminado.
b) Respuesta personal.

6 Respuesta personal.

7 a) V b) V c) V d) F e) F f) V

8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

9 $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10 a) $a = 3$; $b = \frac{1}{2}$; $c = 5$

b) **I.** $A + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **II.** $B + 2C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -\frac{9}{2} & -1 \end{pmatrix}$;

III. $2A - 4C = \begin{pmatrix} -22 & 6 \\ 27 & 14 \end{pmatrix}$

11 Se puede realizar M . N, pero no N . M

12 a) $B + E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 8 \\ 15 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

c) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ d) $B^2 \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 4 \\ 23 & 12 \end{pmatrix}$

e) $2B - 5E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -22 \\ 7 & -12 & -3 \\ 4 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ f) No es posible.

g) No es posible. h) $(A \cdot C) \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 5 & 55 \end{pmatrix}$

i) $A \cdot (C \cdot D) = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 5 & 55 \end{pmatrix}$ j) $A \cdot (B + E) = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 21 \\ 17 & 16 & 35 \end{pmatrix}$

k) $F \cdot G = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 12 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ l) No es posible.

13 $M \cdot N = \begin{pmatrix} 628{,}54 & 735{,}6 & 762{,}81 & 822{,}71 \\ 586{,}5 & 686{,}5 & 711{,}5 & 767 \end{pmatrix}$

Esta matriz muestra los gastos anuales de gas, luz y teléfono de las dos familias.

14 Comprobación.

15 a) $P \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$ b) $P \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -20 \\ 10 & 44 \end{pmatrix}$

c) $P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

16 Es la matriz nula.

17 Verdaderas: b), c), f), j), k), l).

Falsas: a), d), e), g), h), i).

18 a) $A^2 = A$ b) $B^2 = B$ c) $(2A - I)^2 = I$
d) $(2B - I)^2 = I$

19 Respuesta personal.

20 $\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

21 $a = 5$; $b = c = 0$

22 $a = -3$; $b = 1$

23 a) -1 b) 0 c) 4 d) -56

24 a) $k = 24$ b) $k = 0$ c) $k = 2$ y $k = -2$
d) $k = -2$ y $k = 4$

25 a) y b) coinciden **I.** 5 **II.** -2 **III.** 0 **IV.** 0

26 a) $k = \frac{1}{6}$ b) $k = 2$ y $k = -2$ c) $k = 1$ y $k = 0$
d) k puede tomar cualquier valor.

27 a) Área = 27 b) Verificación.

28 a) $y = 3x + 4$ b) Verificación.

29 a) -5 b) -5 c) 5 d) 5

30 Respuesta personal.

31 a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$ La matriz no ampliada es triangular superior.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$ La matriz no ampliada es triangular superior.

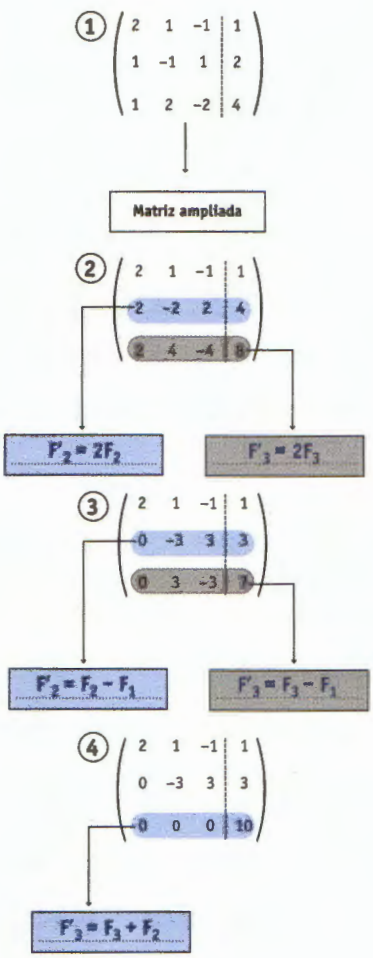
d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

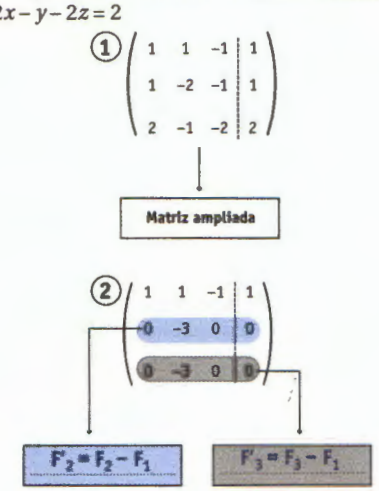
32 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

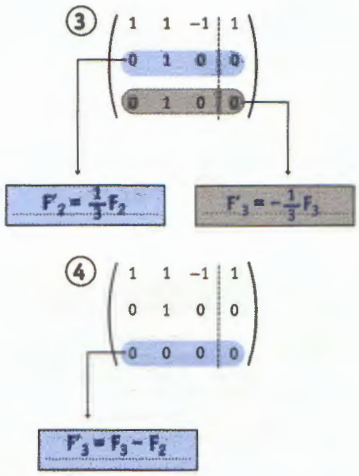
33 a) Sistema compatible determinado. La solución es $x = 3$; $y = 1$.
b) Sistema compatible indeterminado.
c) Sistema incompatible.

34



35 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado.





36 Cuerpo 2, piso 8, departamento 1.

37 2087

38 40°, 140°, 60° y 120°

39 a) $x = y = z = 1$ b) $x = -1$; $y = 4$; $z = 2$
c) $x = -3$; $y = 4$; $z = 0$ d) $x = -1$; $y = -2$; $z = -3$

40 a) Sistema compatible indeterminado.
b) Sistema compatible determinado.
c) Sistema compatible indeterminado.

41 Ninguno de los sistemas tiene solución única.

42

Sistema de ecuaciones	Valores que puede tomar a para que el sistema tenga...		
	solución única	ninguna solución	infinitas soluciones
a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+z=a \\ 2x+2y-(a^2-11)z=2 \end{cases}$	$a \neq \pm\sqrt{13}$	$a = \pm\sqrt{13}$	—
b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$	$a_1 \neq -3$ $a_2 \neq 2$	$a = -3$	$a = 2$
c) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$	$a_1 \neq 1$ $a_2 \neq -2$	$a = -2$	$a = 1$
d) $\begin{cases} x+y+az=2 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$	$a \neq 3$	—	$a = 3$
e) $\begin{cases} 3x-y+az=2a \\ x+y+z=a \\ x+3y=0 \end{cases}$	$a \neq 5$	$a = 5$	—

43 $x = 2$; $y = 4$

44 a) Informática: U$10 000; Servicios: U$15 000; Estadísticas: U$18 000.
b) Sí.

45 a) El itinerario II. b) Ciudad del Cabo, Nueva York.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

c) $V_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $V_{III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

46 a) $\begin{pmatrix} 185 & -330 \\ -495 & 1010 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 124 & -192 \\ -288 & 604 \end{pmatrix}$

47 Son nulos los determinantes de c), d), e), f).

48 a) -16 b) -3 c) -1

49 Comprobación.

50 a) $a = 6$; $b = \frac{1}{2}$; $c = -1$; $d = \frac{3}{2}$

51 Nueva York: 10 días; México: 7 días; Toronto: 5 días.

52 a) Sistema compatible determinado.
b) Sistema compatible indeterminado.
c) Sistema compatible determinado.
d) Sistema compatible indeterminado.
e) Sistema incompatible.
f) Sistema compatible determinado.

53 Respuesta personal.

54 Respuesta personal.

AUTOEVALUACIÓN

1. d)
2. c)
3. a)
4. b)
5. d)
6. c)
7. a)

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Capítulo 6: Probabilidades

1 a) 0,58 c) 32,94% e) 0,12
b) 0,35 d) 32,26% f) 40%

2 a) Promedio: 3,375; desvío estándar: 1,32.
b) 0,5
c) 4
d) 75%

3 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{11}{48}\pi$ c) 0,625

4 a) Todos. c) III y IV e) III y IV
b) IV d) II, III y IV f) IV

5 a) 60 b) 125

6 1680

7 24

8 a) 120 b) 12 c) 48 d) 24

9 a) 5040 b) 720 c) 120

10 a) 720 b) 479 001 600 c) 1 036 800

11 a) 840 c) 600
b) 360 d) 380

12 a) 40 320 b) 1440

13 12 650

14 35

15 120

16 99 768 240

17 a) 525 c) 6 e) 1281
b) 21 d) 27

18 a) I, III y IV son experimentos aleatorios.
b) $E_I = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$E_{III} = \{(C; C); (C; N); (N; C); (N; N)\}$
$E_{IV} = \mathbb{R}^+$

19 a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{4}$

20 a) Casos posibles: 220.
Total de casos favorables: 35;
probabilidad (3 de rock): 0,16
b) 0,05
c) 0,21

21 a) 0,05 b) 0,02 c) 0,04

22 a) 0,2 b) 0,03 c) 0,03

23 0,001

24 Tienen la misma probabilidad.

25 a) 0,25 b) 0,005 c) 0,16

26 b)

27 a) 0,23 b) 0,21

28 a) 0,09; P (B) = 0,21
b) 0,61; P (AUB) = 0,39
c) 0,09; P(A) = 0,21

29 a) 0,1 b) 0,77

30 a) I. 0,65; II. 0,6; III. 0,8; IV. 0,2; V. 0,2; VI. 0,15
b) II; IV

31 0,6

32 a) 0,26 c) 0,53 e) 0,31
b) 0,57 d) 0,8

33 a) 0,04 b) 0,96 c) 0,36

34 0,16

35 a) 0,41 c) 0,81
b) 0,95 d) 0,54

36 a) I. $\frac{5}{9}$; II. $\frac{2}{9}$; III. $\frac{5}{9}$
b) I. $\frac{1}{2}$; II. $\frac{1}{4}$; III. $\frac{1}{2}$

37 a) 0,13
b) 0,02
c) 0,98
d) 0,28

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

38 a) E = {VVV; VVM; VMV; MVV; MMV; MVM; VMM; MMM}

b) $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$

c)

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

39 Construcción.

40 d) Corresponde a una función de probabilidad.

41 a) 0,35 b) 0,37

42 b) – 4

43 a) E(X) = 1,23; σ(X) = 1,12

b) E(ganancia) = 24,6; σ(ganancia) = 22,42

c) Sí.

44 $60

45 – $2,99982

46 a)

X	No gana ninguno	Gana una vez	Ganan los dos
Resultados posibles	$\bar{C} \cap \bar{F}$	$(C \cap \bar{F}) \cup (\bar{C} \cap F)$	$F \cap C$
$p(x)$	$0,7^2 = 0,49$	$0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,42$	$0,3^2 = 0,09$

b)

X	0	1	2	3
Resultados posibles	$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$	$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$	$A \cap B \cap C$
$p(x)$	0,34	0,44	0,19	0,03

47 Comprobación.

48 a) 0,18 b) 0,24 c) 0,95

49 a) 0,4 b) 0,99 c) 0,81

50 0,87

51 a) 0,34 c) 0,87

b) 0,95 d) 0,55

52 $n \geq 9$

53 Construcción.

54 Respuesta personal.

55 a) Tiende a 0.

b) Tiende a 1.

c) Respuesta personal.

56 1140

57 720 formas y en 72; Carlos recibe el primer premio.

58 a) 30 b) 30

59 a) $k = -0,25$ c) 1

b) 0,1625 d) E(X) = 1,59; σ(X) = 0,88

60 0,76

61 Construcción.

62 0,33

63 0,6

64 0,01

AUTOEVALUACIÓN

1 c)

2 b)

3 b)

4 b)

5 b)

6 a)

7 b)

8 a)

Actividades integradoras

1 A = 5; B = 4; C = 3; D = 2.

2 A = 30; B = 24; C = 30; D = 12.

3 Respuesta personal.

4 Viernes: $1250, sábado: $1400, domingo: $3500.

5 $0,45; \frac{9}{893} \cong 0,01$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Índice temático

Cuadernillo 1
1. Funciones exponenciales y logarítmicas
Revisión inicial
El modelo exponencial
La función exponencial
Funciones de la forma $f(x) = k . a^x + b$
Funciones de la forma $f(x) = k . a^{cx}$
Ecuaciones exponenciales
Logaritmos
Logaritmos decimales y logaritmos naturales
Propiedades de los logaritmos
Sistemas de ecuaciones
La función logarítmica
Funciones del tipo $f(x) = \log_a(ax + b)$
El modelo logarítmico
Sucesiones geométricas
Suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica
Modelos de crecimiento geométrico
Noción de límite de una sucesión
El número *e*
En el mundo real
Las funciones exponenciales y los cálculos financieros
Las funciones logarítmicas y las soluciones químicas
Más actividades
Autoevaluación

Cuadernillo 2
2. Funciones trigonométricas
Revisión inicial
Ángulos orientados en el sistema cartesiano
Sistema circular de medición de ángulos
Las razones trigonométricas
La circunferencia trigonométrica
Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo
Funciones trigonométricas de un número real
La función $y = \text{sen } x$
Funciones del tipo $f(x) = a . \text{sen } (bx)$
La función $f(x) = \cos x$
Funciones del tipo $f(x) = a . \cos (bx)$
La función $y = tg\ x$
Pares especiales de ángulos
Ecuaciones trigonométricas
En el mundo real
El sonido y las funciones periódicas
Los modelos periódicos y las funciones trigonométricas
Más actividades
Autoevaluación
Actividades integradoras

Cuadernillo 3
3. Análisis matemático I
Revisión inicial
Aproximación intuitiva al concepto de límite
Límites laterales
Límite de una función en un punto
Cálculo de límites
Límites en el infinito
Algunas indeterminaciones en el cálculo de límites
Continuidad
Asíntotas
La derivada de una función y su interpretación geométrica
Derivada de una función en un punto
Función derivada
Cálculo de derivadas
Tabla de derivadas
Reglas de derivación
Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena
En el mundo real
El ritmo respiratorio
Aventura de alto vuelo
Más actividades
Autoevaluación

Cuadernillo 4
4. Análisis matemático II
Revisión inicial
Aplicaciones de la derivada al estudio de una función
Crecimiento y decrecimiento
Derivadas sucesivas. Concavidad
Problemas de optimización
El concepto de primitiva
Primitivas de funciones elementales
Algunas propiedades de las primitivas
La integral definida y el cálculo de áreas.
Regla de Barrow
En el mundo real
La producción más adecuada
La velocidad que menos perjudica
Más actividades
Autoevaluación
Actividades integradoras

Cuadernillo 5
5. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales
Revisión inicial
Matrices
Operaciones con matrices
Algunas definiciones
Determinantes
Propiedades de los determinantes
Sistemas de *n* ecuaciones lineales con n incógnitas
Método de Gauss
Regla de Cramer
En el mundo real
La matriz de insumo-producto
Las matrices en las rutas aéreas
Más actividades
Autoevaluación

Cuadernillo 6
6. Probabilidades
Revisión inicial
Combinatoria
Diagrama de árbol y de casilleros
Permutaciones y variaciones
Combinaciones
Probabilidades de sucesos
Probabilidad condicional
Independencia entre sucesos
Variable aleatoria
Variable aleatoria discreta
Media, varianza y desvío estándar de una variable aleatoria discreta
Distribución binomial
En el mundo real
Muestreo de aceptación de lotes
Sobre la teoría de la ruina de los jugadores
Más actividades
Autoevaluación
Actividades integradoras

Cuadernillo 7
Respuestas a las actividades de los cuadernillos 1 a 6.

AIQUE